Heisenbergsche Unschärferelation

Siegfried Großmann
Fachbereich Physik Philipps-Universität Marburg
Renthof 6, 35032 Marburg

I. WAS BESAGT DIE UNSCHÄRFERELATION?

Die für Quantensysteme charakteristische *Heisenbergsche Unschärferelation* (Relation = Beziehung) besagt, dass die Verbesserung der Kenntnis des Wertes einer interessierenden physikalischen Größe A von Quantenteilchen unvermeidlich zu einer Verschlechterung der Kenntnis des Wertes gewisser anderer Messgrößen B führt. Anders ausgedrückt: Je genauer die Kenntnis, also je kleiner die Mess,,unschärfe" von A ist, desto größer muss die Mess,,unschärfe", muss die Unkenntnis von gewissen anderen Größen B sein – und umgekehrt.

Diese insbesondere für so genannte *kanonisch konjugierte* Messgrößen A und B geltende Gesetzmäßigkeit wurde erstmals von Werner Heisenberg 1927 (Zeitschrift für Physik 43 (1927) S. 172 – 198) abgeleitet und untersucht. Sie hat dramatische Konsequenzen für unsere Vorstellungen über die Eigenschaften von Quantenteilchen.

Ein besonders wichtiges Paar kanonisch konjugierter Messgrößen sind der Ort x und die Geschwindigkeit v oder richtiger der Impuls $p = mv$ eines Quantenteilchens mit der Masse m. Weil man nach der Unschärfebeziehung beim besten Willen nicht beide zugleich genau kennen, sie nicht zugleich genau messen kann, darf man sich als *eine* unvermeidliche Konsequenz Quantenteilchen nicht als auf einer Bahn $x(t)$ fliegend vorstellen. Gäbe es nämlich eine solche Bahn, die den Teilchenort x zu jeder Zeit t angibt, so könnte man ja die Teilchengeschwindigkeit $v(t) = dx/dt$ zu jeder Zeit einfach ausrechnen und kennte damit zugleich seine Impulswerte $p(t)$ zusammen mit den Orten $x(t)$ entlang der Bahn – was nach der Unschärferelation aber eben nicht sein kann. Für Quantenteilchen gibt es somit keine Bahnen, auf denen sie sich bewegen! Denn eine solche Bahn ließe sich grundsätzlich nicht messen und existiert deshalb auch nicht. Ja schon allein die Vorstellung einer Flugbahn steht im Widerspruch zu einem Grundprinzip der Quantenmechanik, der Unschärferelation. Was aber dann? Von Quantenteilchen muss man Punktwolken von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Raum und auch Punktwolken für ihre Verteilungswahrscheinlichkeiten im Impulsraum angeben, je nach Unschärfe teils mehr, teils weniger ausgedehnt. – Somit ist die Vorstellung des beliebten Bohrschen Atommodells von auf Kreis- oder Ellipsenbahnen um den Atomkern kreisenden Elektronen nicht nur überholt, sondern schlicht falsch.

Zur präzisen Formulierung der Heisenbergschen Unschärferelation müssen wir zunächst einmal den Begriff der *Unschärfe* sorgfältig definieren. Die Messung einer physikalischen Größe A (also etwa des Ortes, des Impulses, des Drehimpulses, usw.) möge die Messwerte $a_1, a_2, a_3, ..., a_N$ liefern, idealerweise unendlich viele, also $N \to \infty$. Daraus kann man den Mittelwert bestimmen, genannt $\langle A \rangle$, also $\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} a_i$. Als Maß für die Abweichung der Schar dieser Messwerte von ihrem Mittelwert eignet sich die als Streuung, Standardabweichung, Schwankung oder auch *Unschärfe* genannte Größe Δ_a, die man aus den Quadraten der Abweichungen vom Mittelwert berechnet: $\Delta_a = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (a_i - \langle A \rangle)^2}$, kurz geschrieben $\Delta_a = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$. Übrigens bezeichnet man das Quadrat Δ_a^2 als die Varianz der Messwerte. Δ_a selbst heißt im Englischen *root mean square*, abgekürzt *rms*, von A.

Man kennt eine physikalische Größe A dann *genau*, wenn $\Delta_a = 0$ ist. Eine von Null verschiedene Unschärfe, $\Delta_a \neq 0$, also eine nur ungenaue Kenntnis des Wertes von A, kann zum einen an den unvermeidlichen Messungenauigkeiten liegen. Zum anderen kann diese aber auch daran liegen, dass in der beobachteten Menge von Quantenteilchen gar nicht alle denselben A-Wert haben.

Die Heisenbergsche Unschärferelation für das Paar kanonisch konjugierter Messgrößen Ort x und Impuls p von Quantenteilchen besagt dann, dass das Produkt derer beider Unschärfen

$$\Delta_x \cdot \Delta_p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

ist, den endlichen Zahlenwert $\hbar/2$ also nicht unterschreiten kann. Hier bedeutet $\hbar = h/2\pi = 1,055 \times 10^{-34}$ Js, das durch 2π geteilte Plancksche Wirkungsquantum h. Die physikalische Einheit Js = Joule × Sekunde, ist die Einheit der Wirkung. Das Plancksche Wirkungsquantum h ist Ausdruck der Erkenntnis, dass die physikalische Größe *Wirkung* in Portionen gestückelt, ,,gequantelt" ist. – Wenn eine der Größen x oder p ganz genau, ganz scharf bekannt, etwa $\Delta_x = 0$ wäre (was grundsätzlich sehr wohl möglich ist), dann wäre $\Delta_p = \infty$, wüsste man also über die konjugierte Messgröße, den Impuls oder die Geschwindigkeit gar nichts, weil deren Unschärfe beliebig groß ist. Oder, falls

$\Delta_p = 0$, weiß man zwar genau, wie schnell das Quantenteilchen fliegt, aber nicht, wo es sich befindet. – Bei kanonisch konjugierten Observablen, wenn also das Produkt AB die Dimension (Einheit) einer Wirkung hat, kommt somit die Wirkungsquantelung ganz unmittelbar als Unschärferelation zum Ausdruck, als ein unübersehbarer, charakteristischer Quanteneffekt, der drastische Unterschiede zur klassischen Physik zur Folge hat.

II. KLASSISCHE UNSCHÄRFEN IN WELLENFELDERN

Die Orts-Impuls-Unschärfe ist eine Eigenschaft von Quantenteilchen. Bei makroskopischen Körpern sind bereits die durch die Messungenauigkeiten gegebenen Unschärfen so groß, dass die durch $\hbar/2$ gesetzte Schranke um Größenordnungen überschritten wird, diese also keinerlei Einschränkung mehr bedeutet. Betrachten wir z. B. den bei der Fußballweltmeisterschaft 2010 in Südafrika eingesetzten Ball Jabulani, der eine Masse von etwa $m = 0,42$ kg hatte. Stellen wir uns vor, man hätte einen aktuellen Ort auf seinem Flug nach einem Schuss auf $\Delta_x = 1$ mm genau gemessen und seine Geschwindigkeit an diesem Ort auf etwa $\Delta_v = 1$ mm/s genau ermittelt; das sind Genauigkeiten, die kaum zu erreichen sind, die aber auch von den Spielern kaum zu nutzen wären. Dann beträgt das Unschärfeprodukt $\Delta_x \cdot \Delta_p = 10^{-3} \cdot 0,42 \cdot 10^{-3}$ kg m^2/s $= 4,2 \times 10^{-7}$ Js, riesig gegenüber der Wirkungsportion $\hbar/2 = 0,53 \times 10^{-34}$ Js! Weil das so ist, kann man bei klassisch-physikalischen Körpern auch $\hbar$ gleich ganz zu Null setzen, bedeutet doch die Unschärferelation keine Einschränkung mehr. Deshalb kann man sich für den Jabulani widerspruchsfrei eindrucksvolle Flugbahnen vorstellen. Klassische Körper bewegen sich auf Bahnen – für Quantenteilchen gibt es Bahnen jedoch nicht, sondern nur Wahrscheinlichkeitswolken für ihre Aufenthaltsorte.

Es gibt aber auch in der klassischen Physik bereits ,,Unschärfebeziehungen". Natürlich kommt in ihnen das Plancksche Wirkungsquantum h **nicht** vor! h kennzeichnet allein die Quantenwelt. Wenn wir Musik hören, erreichen uns Töne oder Tonfolgen, die bekanntlich jeweils einen Anfang und ein Ende haben. Deshalb können das keine ,,reinen" Töne sein, leider oder zum Glück, denn eine schwingende Welle mit nur einer einzigen Frequenz ω $(= 2\pi\nu)$ hat physikalisch keinen Anfang und kein Ende, ist ein unendlich langer Wellenzug (und unendlich langweilig). Überlagert man aber viele benachbarte reine Schwingungen, also viele Frequenzen ω_i, so führt diese Überlagerung zu einem für den Hörer nur endlich lange andauernden *Wellenpaket.* Je kürzer zeitlich ausgedehnt man dieses machen möchte, desto mehr reine Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen muss man überlagern. Nach den Fourier-Sätzen sind die zeitliche Dauer Δ_t des Wellenpakets und die Breite Δ_ω des Intervalls der Frequenzen, die man zur Erzeugung dieses Wellenpakets braucht, zueinander umgekehrt proportional, also $\Delta_\omega \propto 1/\Delta_t$. Es gilt also wieder eine ,,Unschärferelation",

$$\Delta_\omega \cdot \Delta_t \approx 1 \ , \tag{2}$$

diesmal für klassische(!) Wellenpakete.

Ähnlich ist es übrigens, wenn man räumliche Formen oder Strukturen mittels Fourier-Zerlegung durch Überlagerung von Wellen mit vielen Wellenlängen λ_i bzw. Wellenzahlen $k_i = 2\pi/\lambda_i$ beschreibt. Um z. B. eine Glockenkurve der Ausdehnung Δ_x durch Überlagerung von Wellen mit verschiedenen Wellenlängen λ_i darzustellen, benötigt man Wellenzahlen k_i aus einem Bereich mit der Breite $\Delta_k \propto 1/\Delta_x$; wieder nach dem Satz von Fourier. Schon haben wir eine weitere ,,Unschärfebeziehung" der klassischen Physik, diesmal zwischen Ortsbreite und Wellenzahlbreite,

$$\Delta_x \cdot \Delta_k \approx 1 \ . \tag{3}$$

III. HERLEITUNG DER UNSCHÄRFERELATION

Messgrößen werden in der Quantenmechanik *Observable* genannt und durch Operatoren A, B, usw. dargestellt. Weil die gemessenen Werte reelle Zahlen sind, sind die zugeordneten Operatoren selbstadjungiert (oder hermitesch), will sagen, die Operatoren A, B usw. sind gleich ihren jeweils dazugehörigen hermitesch adjungierten Operatoren A^+, B^+ usw., also $A = A^+$, $B = B^+$, usw. Die gemessenen Mittelwerte a, b, usw. berechnen sich aus den Quantenzuständen ψ gemäß $a = \langle\psi|A\psi\rangle$ bzw. $b = \langle\psi|B\psi\rangle$; diese reellen Zahlen a, b heißen auch die *Erwartungswerte* von A und B. Die Abweichungen vom Mittelwert oder Erwartungswert bezeichnen wir mit $\hat{A} = A - a$ oder $\hat{B} = B - b$. Aus ihnen bestimmt man die Streuungen oder Unschärfen gemäß $\Delta_a = \sqrt{\langle\psi|\hat{A}^2\psi\rangle}$ und analog Δ_b. – Übrigens: Genau in so genannten Eigenzuständen ψ_a einer Observablen A, also $A\psi_a = a\psi_a$, ist die Unschärfe gleich Null, $\Delta_a = 0$.

Nun haben wir das Rüstzeug, um die Unschärferelation abzuleiten. Sie ist im Wesentlichen eine Konsequenz der allgegenwärtigen Schwarzschen Ungleichung. Es ist nämlich deshalb naheliegend, sie zum Beweis heranzuziehen, weil $\Delta_a = \sqrt{\langle\hat{A}\psi|\hat{A}\psi\rangle} = |\hat{A}\psi|$ die ,,Länge" des Zustandsvektors $\hat{A}\psi$ ist. Die Schwarzsche Ungleichung besagt in unserem konkreten Fall $|\langle\hat{A}\psi|\hat{B}\psi\rangle| \leq |\hat{A}\psi| \cdot |\hat{B}\psi| \equiv \Delta_a \cdot \Delta_b$. Wie gleich gezeigt werden wird, ist die linke Seite größer als der Erwartungswert des Kommutators von A und B, genauer größer als $\frac{1}{2}|\ \langle\ \psi|\ [A,B]_-\ \psi\ \rangle\ |$. Unter dem Kommutator zweier Observabler A und B versteht man $[A,B]_- = AB - BA$; er bestimmt, wie verschieden das Ergebnis ist, wenn man zuerst A und dann B anwendet (misst) oder umgekehrt zuerst B und dann A. Zusammengefasst gilt somit

$$\frac{1}{2}|\ \langle\ [A,B]_-\ \rangle| \leq \Delta_a \cdot \Delta_b\ . \tag{4}$$

Es kommt also bei der Unschärferelation eines Variablenpaares auf den Erwartungswert ihres Kommutators an, $\langle\ [A,B]_-\ \rangle \equiv \langle\ \psi|\ [A,B]_-\psi\ \rangle$. Es ist dieser Kommutator zweier Observabler, zweier Messgrößen, der die untere Grenze ihres Unschärfeprodukts bestimmt. Der Erwartungswert des Kommutators hängt im Allgemeinen von den Observablen und dem jeweiligen Zustand ab, kann also auch je nach Observablenpaar und Zustand anders sein; nur Null kann die untere Schranke des Streuungsprodukts nicht sein!

Für zwei miteinander vertauschbare Observablen, also $[A,B]_- = AB - BA = 0$, gibt es für deren Unschärfeprodukt keine Einschränkung. Nicht vertauschbare Observable dagegen können nie zugleich genaue, streuungsfrei scharfe Werte haben. Speziell für das Observablenpaar Ort x und Impuls p gilt die kanonische Vertauschungsrelation $[x,p]_- = i\hbar$; setzt man das in (4) ein, so geht diese allgemeine Unschärferelation über in die speziellere Form (1).

Auch Funktionen von p wie z. B. die kinetische Energie $E_{kin} = p^2/(2m)$ oder Funktionen von x wie z. B. die potentielle Energie $V(x)$ sind i.a. nicht vertauschbar, lassen sich also nicht zugleich scharf angeben. Dagegen sind *verschiedene* Komponenten des Orts- und Impulsvektors miteinander vertauschbar, unterliegen also keiner Unschärfeeinschänkung. Z. B. gilt $[y,p_z]_- = 0$. Man kann also zugleich genau wissen, wie schnell das Quantenteilchen in z-Richtung fliegt und wo es sich senkrecht dazu in y-Richtung befindet.

Jetzt werde noch kurz das oben aufgeschobene Beweisstück nachgeholt: Zunächst einmal ist $|\ \langle\ \hat{A}\psi|\ \hat{B}\psi\ \rangle\ |^2 = |\ \langle\ \psi|\hat{A}\hat{B}\psi\ \rangle\ |^2$; sodann kann man $\hat{A}\hat{B}$ zerlegen in seinen reellen und imaginären Anteil $\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}) + \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})$; ,,reell" heißt dabei hermitesch, ,,imaginär" heißt $i\cdot$ hermitesch. Im zweiten Summanden heben sich die Glieder mit a bzw. b gegenseitig auf, so dass man ihn als $\frac{1}{2}(AB - BA)$ schreiben kann. Das zu berechnende Quadrat besteht also aus der Summe der Quadrate dieser beiden Teile und ist demzufolge größer oder höchstens gleich dem Quadrat insbesondere des zweiten Teils allein: $\frac{1}{4}|\langle\psi|(AB - BA)\psi\rangle|^2 \leq |\ \langle\ \hat{A}\psi|\ \hat{B}\psi\ \rangle\ |^2$, was zu zeigen war.

IV. ENERGIE-ZEIT-UNSCHÄRFE

Oft wird im Zusammenhang mit der Orts-Impuls-Unschärferelation auch eine Energie-Zeit-Unschärferelation genannt, etwas leichtfertig. Denn in der Quantenmechanik ist die Zeit t *keine* Observable, sondern eine Zahl, die den zeitlichen Ablauf der Quantenvorgänge parametrisiert. Also gibt es keinen Zeit-*Operator*, dessen Vertauschungsrelation mit dem Energieoperator, der Hamiltonschen Funktion H, man untersuchen könnte. Also gibt es keine gewöhnliche Unschärferelation wie durch Gleichung (4) beschrieben.

Nun haben aber Quantenteilchen auch Welleneigenschaften, in der Regel durch eine ,,Wellenfunktion" $\psi(x,t)$ beschrieben. Deren Quadrat $|\psi(x,t)|^2$ ist die direkt messbare Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, an der Stelle x zur Zeit t ein Quantenteilchen zu finden. Durch die Einsichten von Planck, Einstein, de Broglie u. a. wissen wir, dass die Frequenzen ν bzw. Kreisfrequenzen $\omega = 2\pi\nu$ in der Fourierzerlegung der Wellenfunktion $\psi(x,t)$ mittels $h\nu = \hbar\omega = E$ mit den Energien E sowie die Wellenlängen λ bzw. die Wellenzahlen $k = 2\pi/\lambda$ mittels $h/\lambda = \hbar k = p$ mit den Impulsen p der Quantenteilchen verknüpft sind. Multipliziert man also die klassischen Unschärfebeziehungen (3) und (2) für das Wellenfeld $\psi(x,t)$ mit $\hbar$, so werden daraus quantenmechanische Unschärferelationen für Ort und Impuls, was wir schon kennen, und für Zeit und Energie, was wir jetzt neu lernen. (Den Faktor 1/2 lassen wir einmal außer Acht; er hat damit zu tun, dass die ψ-Welle komplex ist.) Heisenberg hat bereits in seiner grundlegenden Arbeit von 1927 (s. o.) den Zusammenhang zwischen der zeitlicher Dauer Δ_t von Quantenvorgängen und der damit verbundenen Breite Δ_E des Energiespektrums diskutiert.

Die Energie-Zeit-Unschärfebeziehung ist also eine Verbindung der Unschärferelation zwischen konjugierten Fouriervariablen der klassischen Physik (hier ω und t) einerseits und der quantenmechanischen Verknüpfung der Frequenzen ω mit den Energien E mittels $\hbar$ andererseits.